

Zagadnienie transportowe

– optymalizacja dostaw mąki do piekarni według algorytmu programowania operacyjnego

Zagadnienie transportowe to jedna z najefektywniejszych metod optymalizacji. Metoda ta polega na minimalizacji kosztów transportu poprzez wskazywanie optymalnej konfiguracji tras pomiędzy zbiorem dostawców a zbiorem odbiorców. Znajdujące się w różnych miejscach młyny dostarczają mąkę do piekarni znajdujących się w różnych lokalizacjach. Jeżeli młyny należą do różnych właścicieli, każdy młyn będzie starał się dostarczać mąkę do największej liczby piekarni.

Inaczej będzie, gdy kilka młynów znajdujących się w różnych lokalizacjach będzie należało do jednego właściciela. Wtedy właściciel będzie dążył do takiego zorganizowania transportów, aby suma odległości tras do piekarni była jak najmniejsza. Identycznie może być w przypadku, gdy kilka piekarni należeć będzie do jednej firmy. Firma ta będzie starała się zmniejszyć koszty dostaw poprzez minimalizację sumy dostaw do swoich piekarni.

Historia zagadnienia transportowego

Zagadnienie transportowe (zadanie transportowe, problem transportowy, ang. *transportation problem*) służy do obliczania najkorzystniejszego rozplanowania wielkości dostaw homogenicznego towaru pomiędzy m dostawcami a n odbiorcami¹.

W matematyce i ekonomii teoria transportu to nazwa nadana badaniu. Problem optymalizacji transportu i alokacji zasobów został sformułowany po raz pierwszy przez francuskiego matematyka Gaspara Monge'a w 1781 r².

¹ https://pl.wikipedia.org/wiki/Zagadnienie_transportowe.

² G. Monge (1781) *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*. Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris, avec les Mémoires de Mathématique et de Physique pour la même année, str. 666–704.

Do koncepcji Monge'a powrócono w Związku Radzieckim w latach dwudziestych³.

Metody te rozwinął podczas II wojny światowej radziecki matematyk Leonid Kantorowicz, wynalazca badań operacyjnych. Zagadnienie transportowe nazywane jest czasami problemem transportu Monge-Kantorowicza⁴.

Obecnie zagadnienie transportowe jest powszechnie stosowaną metodą optymalizacji procesów logistycznych.

Optymalizacja dostaw zespołu młynów

Firma posiadająca w regionie trzy młyny dostarcza mąkę do pięciu regionalnych piekarni. Umowy na dostawy są tak skonstruowane, że klienci kupujący mąkę płacą stałą opłatę za transport dostaw niezależną od odległości, jaką muszą pokonać mąkowsy.

W tej sytuacji w interesie firmy zarządzającej młynami jest minimalizacja tras.

Każda piekarnia ma stały miesięczny poziom zapotrzebowania na mąkę, wprost wynikający z lokalnego poziomu popytu na chleb.

Tak więc:

- piekarnia 1 potrzebuje miesięcznie 70 t mąki,
- piekarnia 2 – 160 t mąki,
- piekarnia 3 – 90 t mąki,
- piekarnia 4 – 65 t mąki,
- piekarnia 5 – 92 t mąki.

Piekarnie mogą przyjąć więcej mąki niż ilości wymienione wyżej, ale jeżeli dostaną jej mniej, nie zaspokoją potrzeb lokalnej ludności. Wymienione wartości są więc ilościami minimalnymi.

³ Schrijver, Alexander (2003) *Combinatorial Optimization*, Berlin; New York: Springer, str. 362.

⁴ Cédric Villani (2003) *Topics in Optimal Transportation*. American Mathematical Soc., str. 66.

Minimalne zapotrzebowanie piekarni

Zasadę tę można wyrazić prostym zestawem równań:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 70 & (1) \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 160 & (2) \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 90 & (3) \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 65 & (4) \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} \geq 92 & (5) \end{cases}$$

gdzie na przykład wartość x_{24} oznacza ilość mąki, jaką dostarczył młyn B do piekarni 4.

Jak pamiętamy, piekarnia 4 musi mieć minimum 65 t mąki miesięcznie, aby zaspokoić lokalne potrzeby.

Nierówności 1-5 można zapisać jako jedno spójne wyrażenie:

$$\sum_{m \in M, p \in P} x_{(m,p)} \geq d_p \cdot \forall p \in P \quad (6)$$

To wyrażenie oznacza:

suma ilość ton mąki x dostarczanych z pojedynczych młynów m (należących do zbioru młynów M) do piekarni p (należących do zbioru piekarni P). Suma ta nie może być mniejsza niż popyt d , jaki występuje w każdej piekarni p , należącej do zbioru piekarni P .

Wyglądające na bardzo skomplikowane wyrażenie (6) jest tylko skondensowaną formą prostych nierówności 1-4.

Maksymalne możliwości produkcyjne młynów

Z drugiej strony młyny mają określone moce produkcyjne, zapasy mąki nie są w nich zbyt duże. Produkowana mąka sprzedawana jest na bieżąco.

Tabela 1: Siatka odległości z uwzględnieniem limitów dostaw i odbiorów

	Piekarnia 1	Piekarnia 2	Piekarnia 3	Piekarnia 4	Piekarnia 5	Limit młyna
Młyn A	26 km	23 km	27 km	32 km	21 km	92 t
Młyn B	27 km	31 km	21 km	24 km	20 km	210 t
Młyn C	17 km	30 km	20 km	26 km	23 km	175 t
Limit piekarni	70 t	160 t	90 t	65 t	92 t	477 t

Podaż miesięczna młynów kształtuje się na następującym poziomie:

- młyn A produkuje 92 t mąki,
- młyn B – 210 t mąki,
- młyn C – 175 t mąki.

Możemy to napisać w postaci prostych nierówności. Każdy wiersz wyznacza zdolności produkcyjne pojedynczego młyna.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 92 & (7) \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 210 & (8) \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 175 & (9) \end{cases}$$

Można to zapisać w skondensowanej formie:

$$\sum_{m \in M, p \in P} x_{(m,p)} \leq s_m \dots \forall m \in M \quad (10)$$

gdzie S_m to granica zdolności produkcyjnych młyna m .

Zrównoważone zadanie transportowe

Nie bez znaczenia jest to, że młyny mogą produkować wspólnie maksymalnie tyle mąki, ile wszystkie piekarnie mogą minimalnie przyjąć. Jest to oczywiście zjawisko, którego raczej nie spotkamy w rzeczywistości gospodarczej.

W tym obszarze zazwyczaj nie ma równowagi. Aby rozwiązać zagadnienie transportowe należy zbilansować podaż i popyt przez wprowadzenie fikcyjnego magazynu transferowego. W naszym przypadku popyt piekarni i podaż młynów są sobie równe, co można zapisać wzorem:

$$\sum_{i=1}^3 M_i = \sum_{j=1}^5 P_j = 477t \quad (11)$$

Jako uzupełnienie do założeń podstawowych należy wspomnieć, że młyny nie mogą dostarczać do piekarni ujemnych ilości mąki.

$$x_{(m,p)} \geq 0 \dots \forall m \in M, p \in P \quad (12)$$

Aby być bardziej precyzyjnymi, powinniśmy zaznaczyć, żeby algorytm brał pod uwagę wielkość dostaw tylko w postaci liczb całkowitych dodatnich, co można wyrazić w prostym wzorze:

$$x_{(m,p)} \in \mathbb{Z}^+ \dots \forall m \in M, p \in P \quad (13)$$

Odległości pomiędzy magazynami młynów i piekarniami

Piekarnie i młyny rozrzucone są stosunkowo równomiernie w regionie. Aby wyznaczyć optymalne trasy dostaw potrzebujemy siatki odległości pomiędzy poszczególnymi obiektami.

Tabela przedstawia odległości poszczególnych młynów od poszczególnych piekarni. Zawiera też informacje o ograniczeniach w zakresie dostaw i odbiorów.

Aby zadanie transportowe było kompletne niezbędne jest wprowadzenie funkcji celu.

Funkcję tę zapiszemy w skondensowanej formie,

$$\sum_{m \in M, p \in P} c_{(m,p)} x_{(m,p)} \rightarrow \min \quad (14)$$

gdzie c oznacza ilość kilometrów. Przy okazji funkcji celu należy zwrócić uwagę, że nie chodzi wyłącznie o minimalizację kilometrów, lecz minimalizację

iloczynu kilometrów i transportowanej masy mąki, jaką młyny wysyłają do piekarni.

Rozwiązanie równania transportowego

Sformułowane wyżej warunki ograniczające oraz funkcję celu można wprowadzić do dowolnego procesora simplex i w ten sposób uzyskać wynik optymalizacji. Zawsze największym wyzwaniem w procesie programowania operacyjnego było odzwierciedlenie problemu w postaci matematycznej. Obecnie rozwiązanie spójnie opisanego zagadnienia jest łatwe, ponieważ czynność tę wykonują komputery. W internecie można znaleźć wiele kalkulatorów, które online rozwiążą takie zadanie.

Rozwiązaniem funkcji celu (14) naszego zadania jest macierz odległości. Poniżej zamieściłem wynik obliczeń przeprowadzonych przez bibliotekę Pulp w środowisku języka programowania Python.

```
Route Młyn_A_Piekarnia_1 = 0.0
Route Młyn_A_Piekarnia_2 = 92.0
Route Młyn_A_Piekarnia_3 = 0.0
Route Młyn_A_Piekarnia_4 = 0.0
Route Młyn_A_Piekarnia_5 = 0.0
Route Młyn_B_Piekarnia_1 = 0.0
Route Młyn_B_Piekarnia_2 = 53.0
Route Młyn_B_Piekarnia_3 = 0.0
Route Młyn_B_Piekarnia_4 = 65.0
Route Młyn_B_Piekarnia_5 = 92.0
Route Młyn_C_Piekarnia_1 = 70.0
Route Młyn_C_Piekarnia_2 = 15.0
Route Młyn_C_Piekarnia_3 = 90.0
Route Młyn_C_Piekarnia_4 = 0.0
Route Młyn_C_Piekarnia_5 = 0.0
```

Warto sprawdzić, czy uzyskane obliczenia są poprawne. Biorąc pod uwagę limity dostaw i odbiorów z tabeli 1, przedstawiamy wyniki.

Możemy to zrobić ręcznie w sposób przedstawiony poniżej:

```
x11 = 0
x12 = 92
x13 = 0
x14 = 0
x15 = 0
x21 = 0
x22 = 53
x23 = 0
x24 = 65
x25 = 92
x31 = 70
x32 = 15
x33 = 90
x34 = 0
x35 = 0

k = 26*x11+23*x12+27*x13+32*x14 +21*x15+27*x21 +31*x22+21*x23+24*x24+20*x25+17*x31+30*x32+20*x33+26*x34+23*x35

p1 = x11 + x12 + x13 +x14 +x15
p2 = x21 + x22 + x23 +x24 +x25
p3 = x31 + x32 + x33 +x34 +x35

p4 = x11 + x21 +x31
p5 = x12 + x22 +x32
p6 = x13 + x23 +x33
p7 = x14 + x24 +x34
p8 = x15 + x25 +x35
```



Wojciech Moszczyński – absolwent Katedry Ekonometrii i Statystyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu, specjalista z zakresu ekonometrii, *data science* oraz rachunkowości zarządczej. Specjalizuje się w optymalizacji procesów produkcyjnych i logistycznych. Prowadzi badania w obszarze rozwoju i zastosowania sztucznej inteligencji. Od lat zaangażowany w popularyzację ekonometrii oraz *data science* w środowiskach biznesowych

Wyniki możemy wpisać do poniższej tabeli

	Tony	Limity
Młyn A	92	<= 92
Młyn B	210	<= 210
Młyn C	175	<= 175
Piekarnia 1	70	>= 70
Piekarnia 2	160	>= 160
Piekarnia 3	90	>= 90
Piekarnia 4	65	>= 65
Piekarnia 5	92	>= 92
volumen transportu	10599	km*ton

Jak widać, algorytm transportowy perfekcyjnie wyznaczył minimalne trasy jednocześnie zachowując wszystkie zadane wyżej limity poziomu dostaw i odbiorów.

Wojciech Moszczyński
Współpraca Ewa Moszczyńska

Edukacja w ramach Giełdowego Rynku Rolnego nabiera rozpędu

30 czerwca odbyło się szkolenie skierowane do pracowników laboratoriów kontroli jakości w punktach skupu zbóż i w młynach. Spotkanie zostało zorganizowane przez Towarową Giełdę Energii we współpracy z Instytutem Biotechnologii Przemysłu Rolno-Spożywczego im. prof. Wacława Dąbrowskiego – Państwowym Instytutem Badawczym. Patronat honorowy nad cyklem edukacyjnym objęło Ministerstwo Rolnictwa i Rozwoju Wsi.

Uczestnicy szkolenia, w którym wzięło udział 18 firm wchodzących w skład Systemu Magazynów Autoryzowanych (SMA) Giełdowego Rynku Rolnego TGE, mieli okazję zapoznać się m.in. z aspektami dotyczącymi oceny cech organoleptycznych ziarna wg PN-R-74013:2012, oznaczania zanieczyszczeń i szkodników wg PN-R-74015:1994, stosowania sprzętu kontrolno-pomiarowego w laboratorium oraz zasad prawidłowej obsługi wilgotnościomierzy zbożowych i analizatorów

NIR. Uzyskane w ramach zdanego egzaminu uprawnienia rzeczoznawcy w zakresie pobierania próbek znajdują swoje odzwierciedlenie we wpisie do Rejestru Rzeczoznawców, który jest prowadzony przez poszczególnych Wojewódzkich Inspektorów Jakości Handlowej Artykułów Rolno-Spożywczych.

Cykl doskonale wpisuje się w misję Towarowej Giełdy Energii, której jednym z podstawowych założeń jest edukacja uczestników rynku. Szkolenia uruchomione w ramach Giełdowego Rynku Rolnego nastawione są na podnoszenie wiedzy słuchaczy spotkań, ale także realizację celów samego Giełdowego Rynku Rolnego, uwzględniających aspekty bezpieczeństwa zawieranych transakcji, transparentności handlu oraz gwarancji jakości oferowanych produktów – mówi Piotr Zawistowski, prezes Zarządu TGE.

Spotkanie online zostało zorganizowane w ramach cyklu edukacyjnego,

który TGE rozpoczęła w maju br. Jest on skierowany do uczestników oraz współpracowników Giełdowego Rynku Rolnego i zakłada podnoszenie kwalifikacji zawodowych w obszarach związanych m.in. z analityką laboratoryjną, pobieraniem próbek artykułów rolno-spożywczych czy ustalaniem klas jakościowych określonych produktów. Firmy biorące udział w szkoleniach zyskują niezbędną wiedzę oraz kompetencje wykorzystywane w ramach własnych zasobów personalnych.

Rolę platformy edukacyjnej doceniają także partnerzy i współpracownicy TGE. W czerwcową odsłonę cyklu zaangażował się Instytut Biotechnologii Przemysłu Rolno-Spożywczego, który przedsięwzięcie przeprowadził, a także Ministerstwo Rolnictwa i Rozwoju Wsi, które objęło szkolenie patronatem honorowym. To pokazuje, że kierunek obrany przez TGE jest słuszny i spotyka się z uznaniem zewnętrznych instytucji.