

Czy opłaca się koalicja z nieuczciwą firmą?

Przykład zastosowania teorii gier
Lloyda S. Shapleya



Wojciech Moszczyński



działanie nielegalne czy oszukańcze jest ściśle związane z systemem korupcyjnym. Można robić przekręty, trzeba tylko się dzielić z politykami. Inaczej jest w krajach zachodnich. Tam również można łamać prawo lecz należy mieć pełną świadomość, że jeżeli proceder zostanie wykryty kara jest nieuchronna. Kultura zachodnia nie potępia całkowicie firm, które próbują wykorzystywać luki i ograniczenia w rynku. Zawsze przy kalkulacji tego typu biznesu dodaje się tak zwaną premię za ryzyko. Firmy, które ponoszą większe ryzyko swojej działalności mają też większe zyski. Teraz można zadać pytanie, czy współpraca z firmą, która działa na granicy prawa, ponosi

Pamiętamy jak w czasie pandemii pojawiły się firmy, które oszukiwały na maseczkach, na płynach dezynfekujących. Układ towarzysko-polityczny zdawał sobie sprawę z przyszłej mglistej odpowiedzialności, która może nadejść lub nie. Potem pojawiła się kolejna okazja na stworzenie monopolu; powstała krajowa grupa spożywcza, której jedynym osiągnięciem był drastyczny wzrost cen cukru. Kombinacja polityki, a konkretnie osób mających wpływ na regulację prawne, i braku skrupułów zwykle skutkuje pojawieniem się obostrzeń mających na celu stworzenie quasi monopolu, na których zarabiają „znajomi królika”. Inaczej było z importem płodów rolnych z Ukrainy. Tam obostrzeniem była blokada portów czarnomorskich. Kraj więc zmuszony był skierować strumień towarów do krajów ościennych, w tym Polski. Co działa się potem każdy pamięta. Do dzisiaj minister rolnictwa nie zdecydował się odtajnić listy firm, które dopuściły się fałszowania dokumentów przewozowych. Zboże techniczne stawało się zbożem konsumpcyjnym. To, co było wysłane jak tranzyt lądowało w polskich hurtowniach spożywczych.

Czy przekręty handlowe są korzystne dla gospodarki?

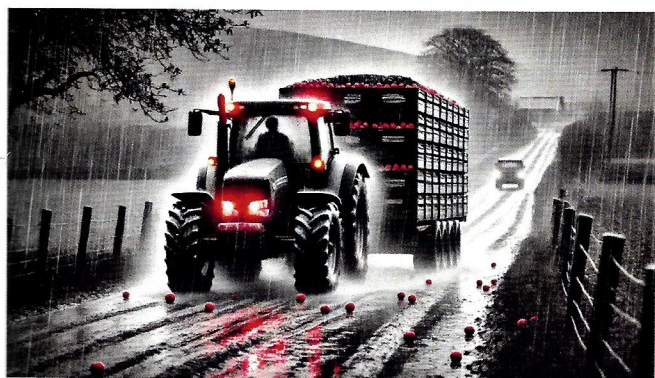
Niestety Polska myśl ekonomiczna nie zaprzęta sobie głowy tym czy pewne zjawiska są korzystne dla rozwoju gospodarczego. Łamanie prawa zawsze jest zjawiskiem godnym potępienia, zarówno w Polsce, jak i w krajach zachodnich. W krajach post-sowieckich takich jak Białoruś, Rosja, Ukraina czy Kazachstan,

wysokie ryzyko, ale jej zyski są znacznie wyższe, jest opłacalna. Do 2024 roku Nagroda Banku Szwecji im. Alfreda Nobla w dziedzinie nauk ekonomicznych została przyznana 96 laureatom. Spośród nich 60 to obywatele Stanów Zjednoczonych, co stanowi około 62,5% wszystkich laureatów. Może warto w tym gronie poszukać kogoś kto może spróbowałby wyjaśnić znaczenie nieuczciwych firm w przemyśle spożywczym, czyli w tej branży gdzie ostatnimi czasy w Polsce jest ciekawie.

Lloyd S. Shapley to amerykański matematyk i ekonomista, który jest znany przede wszystkim z pracy w dziedzinie teorii gier oraz ekonomii matematycznej. Otrzymał Nagrodę Nobla w dziedzinie ekonomii w 2012 roku wspólnie z Alvinem Rothem, za ich wkład w teorię stabilnych alokacji i projektowanie rynków. Stworzył metodę sprawiedliwego podziału zysków w grze koalicyjnej, opartą na wkładach graczy do różnych koalicji. To jedno z jego najbardziej znanych osiągnięć w teorii gier. Więc chyba mamy to czego szukaliśmy.

Teraz zabawmy się w przykład z Polski

Mamy czterech kluczowych graczy, którzy skupują owoce z rynku. Dodatkowo pojawia się dwóch innych, którzy z tytułu koneksji politycznych, robią coś, czego normalne firmy nie mogą – skupują po niskiej cenie owoce z Ukrainy. Te owoce przyjmowane są jako tranzyt. Następnie dokumenty są przetwarzane i owoce zostają w kraju. Każdy z tych graczy może samodzielnie kształtować ceny. Gracze też mogą tworzyć koalicję. Dwie firmy, które skupują owoce z Ukrainy łamią prawo



i ponoszą ryzyko. W związku z ponoszeniem ryzyka odnoszą też większe zyski. Zyski te są związane z premią za ryzyko. Wszystkie sześć firm może nawiązywać sojusze, wprowadzać dodatkową wartość.

Istnieje jeszcze dodatkowy warunek: gdy więcej niż 3 firmy się zjednoczą i zaczną działać razem mogą dostać karę za praktyki monopolistyczne. Nie wiem czy takie prawo istnieje, dodałem je dla zabawy. Istnieją rozmaite obostrzenia dotyczące struktury kapitału, osobowości prawnej czy przynależności do związków religijnych, które mają bezpośredni wpływ na tworzenie zaburzeń rynkowych. Przykładem takiego prawa jest prawo do kupowania przez związki wyznaniowe ziemi rolnej bez konieczności spełnienia rygorystycznych warunków, jakimi zostały obciążone inne podmioty gospodarcze w Polsce.

Analiza matematyczna

Wzór na wartość Shapleya

Wartość Shapleya dla gracza i w grze z funkcją charakterystyczną v jest zdefiniowana jako:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(|N| - |S| - 1)!}{|N|!} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

Gdzie:

- N – zbiór wszystkich graczy ($N = \{A, B, C, D, E, F\}$),
- S – dowolna koalicja nie zawierająca gracza i ,
- $|S|$ – liczba graczy w koalicji S ,
- $v(S)$ – wartość koalicji S ,
- $v(S \cup \{i\})$ – wartość koalicji S po dodaniu gracza i ,
- $\frac{|S|!(|N| - |S| - 1)!}{|N|!}$ – waga, proporcjonalna do liczby możliwych permutacji koalicji.

Teraz wszyscy mogą się na mnie obrazić, podobno jeden wzór w książce powoduje, że sprzedaż tej książki spada o połowę. Możemy więc wzorem naszych noblistów, spróbować wyjaśnić znaczenie nieuczciwych firm poprzez literaturę. Jeżeli jednak nasi nobliści nie są w tej dziedzinie przydatni proponuję skorzystać ze wzorów proponowanych nam przez noblistów amerykańskich.

Wyznaczenie wartości Shapleya opiera się na dokładnym policzeniu wkładu każdego gracza do wszystkich możliwych koalicji, uwzględniając ich wpływ na łączny zysk. Oto wyjaśnienie kroków, wzorów i szczegółowe obliczenia.

Wzór Shapleya jest bardzo prosty, prosty też jest jego sposób rozumowania.

Teraz omówimy, co oznaczają poszczególne elementy wzoru.

N: Zbiór wszystkich graczy

To grupa wszystkich firm, które biorą udział w grze. W naszym przykładzie: $N = \{A, B, C, D, E, F\}$.

Np. N oznacza wszystkie firmy skupujące owoce: A, B, C, D (działające legalnie) oraz E, F (działające ryzykownie).

S: Dowolna koalicja graczy, która NIE zawiera gracza i

Koalicja S to grupa firm, które ze sobą współpracują, ale nie ma w niej konkretnej firmy i , dla której liczymy wartość Shapleya.

Np. jeśli liczymy wartość Shapleya dla firmy A , to S może być $\{B, C\}$, $\{D, E\}$, ale **nie zawiera A** .

|S|: Liczba graczy w koalicji S

To po prostu liczba firm w danej grupie S .

Np. jeśli $S = \{B, C, D\}$, to $|S| = 3$ (grupa zawiera trzy firmy: B, C, D).

$v(S)$: Wartość koalicji S

Wartość $v(S)$ oznacza, ile zysku osiąga grupa S , gdy firmy z tej grupy współpracują.

Np. jeśli koalicja $S = \{B, C\}$ osiąga zysk 25, to $v(S) = 25$.

$v(S \cup \{i\})$: Wartość koalicji S , gdy dodamy do niej gracza i

Oznacza to, że sprawdzamy, ile wart jest zysk, gdy do grupy S dołączy konkretna firma i .

Np. jeśli $S = \{B, C\}$ osiąga zysk 25, ale gdy do tej grupy dołączy A , zysk wzrasta do 35, to: $v(S \cup \{A\}) = 35$

Marginalny wkład:

Różnica między wartością $v(S \cup \{i\})$ a $v(S)$ to „wkład”, jaki gracz i wnosi do danej koalicji: $v(S \cup \{i\}) - v(S)$

Np. jeśli $v(S \cup \{A\}) = 35$ i $v(S) = 25$, to wkład gracza A wynosi: $35 - 25 = 10$

Waga:

Waga określa, jak ważny jest wkład gracza i w tej konkretnej koalicji. Zależy od liczby graczy w S i liczby graczy w N .

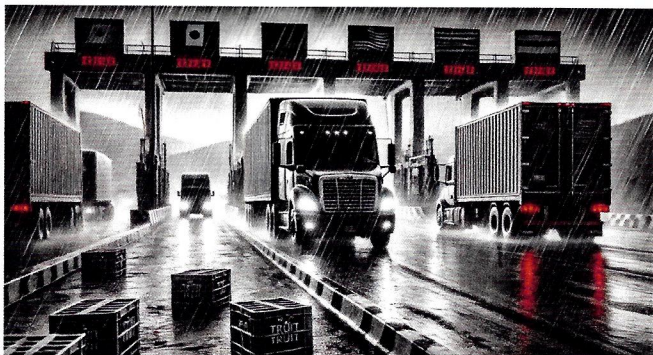
Wzór na wagę to: $Waga = |N|! \cdot |S|! \cdot (|N| - |S| - 1)!$

Np. jeśli w koalicji S są 2 firmy ($|S| = 2$), a wszystkich firm jest 6 ($|N| = 6$), to waga wynosi: $6! \cdot 2! \cdot (6 - 2 - 1)! = 720 \cdot 2 \cdot 3! = 720 \cdot 12 = 8640$

Wartość Shapleya:

Aby obliczyć wartość Shapleya dla gracza i , sumujemy wszystkie wkłady marginalne z każdej możliwej koalicji, pomnożone przez odpowiednie wagi: $\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} Waga \cdot (v(S \cup \{i\}) - v(S))$

To oznacza: dodajemy wszystkie wkłady gracza i do różnych koalicji, uwzględniając prawdopodobieństwo, że gracz i dołączy do danej grupy.



Firma A o nazwie PUH „Dzbanek”

Powiedzmy, że firma PUH „Dzbanek” jest jedną z uczciwych firm, która pomstuje na nieuczciwą konkurencję. Ale zamiast walczyć „Dzbanek” może zacząć myśleć i spróbować zjednoczyć się z nieuczciwymi konkurentami. Zobaczmy jakby to wyszło z obliczeń.

Wartość Shapleya dla firmy A pokazuje, ile wnosi ona do różnych grup (koalicji), gdy współpracuje z innymi firmami. Obliczamy, ile dodatkowego zysku wnosi A do każdej możliwej grupy i jak ten wkład wpływa na łączny zysk.

Firma A może współpracować z różnymi grupami, ale na początku liczymy jej wkład, gdy dołącza do innych grup. Oto możliwe grupy (koalicje):

- Pusta grupa: $S=\emptyset$,
- Grupa z jedną firmą: $S=\{B\},\{C\},\dots$,
- Grupa z dwoma firmami: $S=\{B,C\},\{B,D\},\dots$,
- Grupa z trzema firmami: $S=\{B,C,D\},\dots$,
- Grupa z czterema firmami: $S=\{B,C,D,E\},\dots$,

Dla każdej grupy liczymy:

1. **Wartość koalicji bez firmy A:** ile zyskują firmy w tej grupie, gdy A nie jest z nimi.
2. **Wartość koalicji z firmą A:** ile zyskują firmy w tej grupie, gdy A dołącza.
3. **Wkład marginalny:** różnica między tymi dwiema wartościami: $\text{Wkład marginalny} = v(S \cup \{A\}) - v(S)$
Przykład: jeśli $S=\{B,C\}$, a $v(S)=25$, to wartość koalicji po dołączeniu firmy A ($v(S \cup \{A\})$) może wynosić 35. Wkład marginalny firmy A to: $35-25=10$
4. **Waga dla każdej koalicji:** ile razy dana grupa może się pojawić w różnych konfiguracjach. Wagę obliczamy na podstawie liczby firm w grupie: $\text{Waga} = |N|! / (|S|! \cdot (|N| - |S|)!)$
Przykłady obliczeń:

Grupa $S=\emptyset$ (pusta koalicja):

- $v(S)=0$ (pusta grupa nie generuje żadnego zysku).
- $v(S \cup \{A\})=10$ (firma A sama wnosi zysk 10).
- Wkład marginalny: $10-0=10$.
- Waga: $6! / (0! \cdot 5!) = 720 / 120 = 6$.
- Wkład do wartości Shapleya: $10 \cdot 6 = 60$.

Grupa $S=\{B\}$:

- $v(S)=10$ (firma B wnosi zysk 10).
- $v(S \cup \{A\})=25$ (firma A i B razem osiągają zysk 25).
- Wkład marginalny: $25-10=15$.
- Waga: $6! / (1! \cdot 4!) = 720 / 24 = 30$.
- Wkład do wartości Shapleya: $15 \cdot 30 = 450$.

Grupa $S=\{B,C\}$:

- $v(S)=25$ (firma B i C razem osiągają zysk 25).
- $v(S \cup \{A\})=35$ (dodanie firmy A zwiększa zysk do 35).
- Wkład marginalny: $35-25=10$.
- Waga: $6! / (2! \cdot 3!) = 720 / 6 = 120$.
- Wkład do wartości Shapleya: $10 \cdot 120 = 1200$.

Grupa $S=\{B,C,D\}$:

- $v(S)=45$ (zysk trzech firm bez A).
- $v(S \cup \{A\})=55$ (zysk po dołączeniu firmy A).
- Wkład marginalny: $55-45=10$.
- Waga: $6! / (3! \cdot 2!) = 720 / 6 = 120$.
- Wkład do wartości Shapleya: $10 \cdot 120 = 1200$.

Sumowanie wkładów

Dodajemy wszystkie wkłady do wartości Shapleya:

$$\phi A = 60 + 450 + 1200 + \dots = 28.33$$

Podsumowanie

- Firma A wnosi dodatkowy zysk do różnych grup, co pokazują obliczenia dla każdej koalicji.
- Te wkłady są ważone, aby uwzględnić, jak często firma A pojawia się w różnych układach.
- Łączna wartość wkładów (28.33) pokazuje, że firma A PUH „Dzbanek” jest ważnym, ale umiarkowanym zyskownym partnerem w koalicjach.

Czy firmie A (PUH „Dzbanek”) opłaca się wchodzić w koalicję z firmą E (nieuczciwą)?

Przy współpracy z firmą E (nieuczciwą):

- jeśli A wchodzi w koalicję z B i E, zysk jest optymalny, ponieważ:
- **koalicja A, B, E:** wartość koalicji = 65
- E wnosi premie za tańsze owoce, ale ryzyko pozostaje kontrolowane, ponieważ liczba firm nie przekracza 3 (brak kary antymonopolowej).

Przy dużych koalicjach (z więcej niż 3 firmami):

- jeśli A współpracuje z B, E, F, kara antymonopolowa zmniejsza wartość koalicji:
- **koalicja A, B, E, F:** wartość koalicji = $95 - 20 = 75$.
- wzrost wartości jest niewielki w porównaniu z ryzykiem związanym z dodatkowymi firmami.

Przy współpracy tylko z firmami legalnymi:

- **koalicja A, B, C:** wartość koalicji = 55
- współpraca z legalnymi firmami jest stabilna, ale zyski są niższe w porównaniu do dodania E.
- **Optymalna koalicja dla firmy A:**
Najbardziej opłaca się **koalicja A, B, E**:
- łączy stabilność jednej firmy legalnej (B) z wysokimi zyskami z E
- unika ryzyka kar antymonopolowych (mniej niż 4 firmy)
- zapewnia wyraźny wzrost wartości (65 w porównaniu do 55 przy samych firmach legalnych).

Wniosek końcowy

Firmie A PUH „Dzbanek” opłaca się wchodzić w koalicję z E („nieuczciwą”), jeśli ograniczy liczbę członków koalicji do maksymalnie 3 firm. Wtedy firma E wnosi dodatkowe zyski, a ryzyko pozostaje akceptowalne. Jednak przy większych grupach kara i ryzyko prawne przewyższają korzyści.

Wojciech Moszczyński

Wojciech Moszczyński – absolwent Katedry Ekonometrii i Statystyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu; specjalista z zakresu ekonometrii, finansów, data science oraz rachunkowości zarządczej. Specjalizuje się w optymalizacji procesów produkcyjnych i logistycznych. Przewodzi badania w obszarze rozwoju i zastosowania sztucznej inteligencji. Od lat zaangażowany w popularyzację machine learning oraz data science w środowiskach biznesowych.