

Przykład zastosowania programowania liniowego przy określaniu optymalnej struktury asortymentu w piekarni

Każdy, kto rozumie matematykę na poziomie szkoły podstawowej, może przeprowadzić w swojej piekarni proces optymalizacji. Jego wynikiem będzie wyraźnie zauważalny wzrost zysków lub zmniejszenie ryzyka. Każdy właściciel piekarni ma kilka obszarów, gdzie widzi możliwość optymalizacji, oszczędności lub wzrostu zysków.

Osobiście nie znam nikogo, kto lubiłby matematykę. Nie znam też nikogo, kto by nie wykorzystywał kalkulacji do zarabiania albo chociaż ułatwiania sobie życia. Z matematyką wiążą się więc skrajne emocje, z jednej strony unikamy jej, a z drugiej nie potrafimy bez niej żyć.

Instynktownie czujemy, że umiejętnie kalkulując możemy podnieść nasze zarobki, skrócić czas dojazdu albo zminimalizować ryzyko. Widzimy, jak wiele chleba idzie do utylizacji, jak niedostatecznie zaprojektowaliśmy strukturę asortymentu. Czujemy się bezradni, bo nie wiemy, jak zabrać się do optymalizacji.

Czujemy, że aby tego dokonać musimy wejść głęboko w analizę matematyczną, działania różniczkowe, jakieś wzory i wykresy. Kto ma dzisiaj na to czas. Często nie mamy czasu zrobić podstawowych podsumowań. Mamy kłopoty z podstawowymi kalkulacjami. Wewnętrznie czujemy, że zaproponowany przez księgową podział kosztów na stałe i zmienne jest niewłaściwy. Niechętnie wchodzimy na nieznaną gruntu, zwłaszcza gruntu przepojony zasadami i równaniami, gruntu spowity mgłą abstrakcyjnych wyrażań matematycznych.

Prawda jest jednak inna. Dzięki takim publikacjom jak ta oraz nowym kalkulatorom działającym w sieci online możemy stosunkowo łatwo i bezboleśnie przeprowadzić pewne ważne usprawnienia.

Jest to pierwszy artykuł z cyklu publikacji promujących zastosowanie prostej matematyki do poprawy jakości naszego biznesu, wzrostu rentowności, spadku ryzyka i ogólnie poprawy własności naszych procesów. Dzisiaj dowiemy się, w jaki sposób zoptymalizować asortyment sprzedawanych produktów. Użyjemy algorytmów tzn. programowania liniowego. Na tyle prostych, że każdy kto miał minimalny kontakt z matematyką je zrozumie.

Czym jest i kiedy powstało programowanie liniowe?

Programowanie liniowe, w najprostszej formie, składa się z równania celu oraz kilku nierówności przedstawiających ograniczenia.

Programowanie liniowe było bardzo szeroko wykorzystywane podczas II wojny światowej. Alianci zdawali sobie sprawę z tego, że mogą nie wygrać z III Rzeszą i cesarstwem Japonii stosując tradycyjne metody zarządzania logistyką i zaopatrzeniem. Mając ograniczone zasoby środków do prowadzenia wojny musieli wiedzieć, jak nimi dysponować, aby ich wykorzystanie było jak najlepsze. Na pomoc przyszli

matematycy. Dzięki nim procesy logistyczne w armii amerykańskiej znacznie się poprawiły. Równania zmniejszyły ryzyko utraty ładunku, maksymalizowano dostępność środków opatrunkowych i straty w szeregach wroga. Co ciekawe, programowanie liniowe wynalazł w 1939 roku radziecki ekonomista Leonid Kantorowicz.

Przykład programowania liniowego

Założmy, że w naszej piekarni produkujemy trzy rodzaje chleba. W tabeli pokazany jest zysk netto ze sprzedaży każdego rodzaju chleba.

Chleb	Zysk netto na bochenku
Chleb Bałtonowski	1.0 zł
Chleb Staropolski	2.4 zł
Chleb Sierpecki	1.2 zł

Chleby te różnią się nieznacznie składnikami, różny jest też ich zysk jednostkowy. Mieszkańcy miasteczka, w którym sprzedajemy nasze produkty, wydają się nie mieć szczególnych preferencji i kupią od nas każdy rodzaj chleba. W tym zadaniu, jako właściciele piekarni, chcemy maksymalizować zysk ze sprzedaży chleba poprzez zmianę struktury sprzedaży.

Formułowanie funkcji celu

Zapišmy więc naszą funkcję celu:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 1.0x_1 + 2.4x_2 + 1.2x_3 \rightarrow \max$$

Powyższe wyrażenie przedstawia sumę zysków ze sprzedaży poszczególnych chlebów. Chodzi nam o to, aby ta suma była jak największa. Mówimy wtedy o maksymalizacji funkcji celu.

W naszym równaniu x_1 oznacza liczbę bochenków sprzedanego chleba bałtonowskiego, x_2 – staropolskiego, x_3 – sierpeckiego.

Założmy, że sprzedaliśmy 80 sztuk chleba sierpeckiego, wtedy zysk jednostkowy z bochenka 1,2 zł mnożymy przez 80 sztuk, co daje nam 96 zł zysku ze sprzedaży.

Ponieważ naszym celem jest maksymalizacja zysku, więc intuicyjne rozumiemy, że powinniśmy sprzedać maksymalną liczbę tego chleba, który ma najwyższą marżę.

Niestety, zarówno w życiu, jak i w piekarni, nie ma nic za darmo.

Mamy ograniczone zasoby produkcyjne i musimy wziąć je pod uwagę w maksymalizacji naszego zysku.

Formułowanie ograniczeń

Poniższa tabela przedstawia zużycie dwóch składników, które muszą być obecne przy produkcji chleba.

Surowce	Baltonowski x1	Staropolski x2	Sierpecki x3	Limit surowców
Składnik 1	0.05	0.03	0.0	260
Składnik 2	0.01	0.06	0.04	310

Teraz musimy zapisać powyższe ograniczenia jako nierówności matematyczne.

Ograniczenie związane z użyciem składnika 1 można zapisać w następujący sposób:

$$0.05x_1 + 0.03x_2 \leq 260$$

Jak pamiętamy x_1 to liczba wyprodukowanego chleba baltonowskiego. Przy produkcji każdego bochenka tego chleba zużywa się 0,05 g składnika 1. Produkcję można kontynuować aż do wyczerpania składnika 1, czyli do wyczerpania 260 kg zapasu. Wszystkie warunki ograniczające w tym zadaniu można zapisać w następujący sposób.

$$\begin{cases} 0.05x_1 + 0.03x_2 \leq 260 \\ 0.01x_1 + 0.06x_2 + 0.04x_3 \leq 310 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Na uwagę zasługują trzy ostatnie nierówności mówiące, że liczba poszczególnych chlebów: x_1 ,

x_2 , x_3 musi być większa lub równa zero. Gdybyśmy o tym zapomnieli, algorytm maksymalizujący zysk ze sprzedaży mógłby pokazać nam wartości ujemne. Matematyka jest nauką wymagającą precyzji. Algorytm nie wie, że nie istnieje ujemna sprzedaż.

Właśnie utworzyliśmy algorytm programowania liniowego. Formułowanie algorytmu jest najtrudniejszym etapem pracy. Czynność ta wymaga pewnej wprawy i abstrakcyjnego

myślenia. Wystarczy tutaj podstawowa znajomość zasad matematyki.

Rozwiązanie algorytmu

Do niedawna rozwiązanie podobnych algorytmów stanowiło nie lada wyczyn. Konieczna była znajomość operacji na macierzach oraz dokładne poznanie żmudnych procedur obliczeniowych. Na szczęście żyjemy w czasach, w których większość problemów możemy rozwiązać przez internet. Podobnie jest i tutaj. Wystarczy wpisać do przeglądarki hasło: „Simplex calculator”, aby znaleźć wiele dostępnych online formularzy do wpisania i obliczenia naszego algorytmu. Ja skorzystałem z kalkulatora ze strony maslowski.pl

Rozwiązanie algorytmu za pomocą biblioteki PuLP

Profesjonalni analitycy nie korzystają z kalkulatorów internetowych. Aby obliczyć nasz algorytm skorzystam z bezpłatnej biblioteki Pulp języka Python.



☐ Web
 ☒ maslowski.pl

maslowski.pl

O MNIE

BADANIA OPERACYJNE

- zadania
- nauka
- konkurs
- literatura

KOLARSTWO

- Giro 2004
- Giro 2005
- Giro 2006
- TdF 2004
- TdF 2005
- TdF 2006
- TdF 2007

POCZTA NA maslowski.pl

DOWNLOAD

maslowski.pl > badania operacyjne > nauka > simplex on-line

SIMPLEX on-line - wprowadzanie danych

Podana liczba zmiennych to: 3
 Podana liczba ograniczeń to: 5

Funkcja celu z:
 $z = 1x_1 + 2.4x_2 + 1.2x_3 \rightarrow \max$

Ograniczenia:
 (1) $0.05x_1 + 0.03x_2 + 0x_3 \leq 240$
 (2) $0.01x_1 + 0.06x_2 + 0.04x_3 \leq 310$
 (3) $1x_1 + 0x_2 + 0x_3 \geq 0$
 (4) $0x_1 + 1x_2 + 0x_3 \geq 0$
 (5) $0x_1 + 0x_2 + 1x_3 \geq 0$

Uwaga!
 Obowiązującym znakiem dziesiętnym jest . (kropka), a nie , (przecinek)!

```

In [4]: from pulp import *
        # Initialize Class
        model = LpProblem("Zadanie_10_STR_30", LpMaximize)

In [5]: LpVariable(name="Max_zysku_produkcji", lowBound=0, upBound=None, cat='Internal', e=None)
Out[5]: Max_zysku_produkcji

In [6]: ### Definiowanie zmiennych decyzyjnych

        x1 = LpVariable('x1', lowBound=0, cat='Integer')
        x2 = LpVariable('x2', lowBound=0, cat='Integer')
        x3 = LpVariable('x3', lowBound=0, cat='Integer')

```

Po zdefiniowaniu celu i zmiennych x_1, x_2, x_3 wprowadzam zdefiniowany przez nas algorytm.

```

Definiowanie funkcji celu

In [7]: model += 1.0*x1 + 2.4*x2 + 1.2*x3

Definiowanie ograniczeń

In [8]: model += 0.05*x1 + 0.03*x2 <= 260
        model += 0.01*x1 + 0.06*x2 + 0.04*x3 <= 310

In [9]: # Solve Model
        model.solve()
        print("Należy produkować {} x1".format(x1.varValue))
        print("Należy produkować {} x2".format(x2.varValue))
        print("Należy produkować {} x3".format(x3.varValue))

        Należy produkować 2332.0 x1
        Należy produkować 4778.0 x2
        Należy produkować 0.0 x3

In [10]: z = x1.varValue*1.0 + x2.varValue*2.4 + x3.varValue*1.2
        print("Maksymalny zysk ze sprzedaży:", z)

        Maksymalny zysk ze sprzedaży: 13799.199999999999

```

Zdefiniowany przez nas algorytm wskazał, że z posiadanych zapasów składnika 1 i składnika 2 należy wyprodukować 2332 chleby baltonowskie oraz 4778 chlebów staropolskich. Taka struktura sprzedaży spowoduje maksymalizację zysku ze sprzedaży do wysokości 13 799 zł. Algorytm wskazał, że nie należy produkować chleba sierpeckiego.

Co by się stało, gdyby jednak mieszkańcy miasteczka lubili i chcieli kupować chleb sierpecki?

Według naszych szacunków, chleb ten sprzedałby się na poziomie 2500 bochenków.

Należałoby wtedy w naszym algorytmie zmienić warunek z $x_3 \geq 0$ na $x_3 \geq 2500$. Po przeliczeniu okazuje się, że całkowity zysk ze sprzedaży zmniejszył się do 13 466 zł.

Oznacza to, że do sprzedaży każdego chleba sierpeckiego dopłacamy 333 zł/2500 = 0,13 zł. Powinniśmy więc podnieść cenę tego chleba tak, aby zysk jednostkowy zbliżył się do poziomu 1,33 zł.

Z algorytmu optymalizacji wynika, że możemy wyprodukować 2500 bochenków chleba sierpeckiego pod warunkiem podniesienia zysku jednostkowego z tego chleba do poziomu 1,33 zł. Taka cena chleba daje możliwość uzyskania zysku w wysokości 13 792 zł.

Podsumowanie

Zastosowanie programowania liniowego w celu optymalizacji procesów produkcyjnych może przynieść duże korzyści. Jak pokazałem, najtrudniejszym elementem jest

sformułowanie równań i nierówności matematycznych. Nie jest tu potrzebna wiedza z zakresu matematyki, lecz zdrowy rozsądek i odrobina abstrakcyjnego myślenia.

Kiedyś prawdziwym problemem było obliczenie algorytmów optymalizacyjnych. Dzisiaj możemy posłużyć się kalkulatorami simplex, które w zupełności wystarczą, aby uzyskać prawidłowe wyniki.

Wojciech Moszczyński

W prenumeracie **TANIEJ!**
Więcej na www.ppic.pl i na str. 64